Analisi Matematica II

Esercitazione 5 - Serie di funzioni

Tutor: Simone Marullo

simone.marullo@student.unisi.it

Francesco Maratta

francesco.maratta@student.unisi.it

Succession di funzioni

$(f_n) \longrightarrow f$ puntualmente in S

se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in S$

$(f_n) \longrightarrow f$ uniformemente in S

se $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0$

conv. uniforme $\rightarrow$ conv. puntuale
$\not\leftarrow$

tuttavia c. puntuale è necessaria per c. uniforme

Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $\forall n \geq 1$

a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale I e la funzione limite della successione (f_n).

Lo studio è limitato all'intervallo $[0,1]$.

Consideriamo gli estremi:

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 0$$

Prendiamo $x \in (0,1)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = 0 \cdot 1 = 0$$

Quindi, $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\qquad I = [0,1]$

b) Studiare la convergenza uniforme di (f_n) su I e sugli intervalli $[0,b]$ con $0<b<1$

La convergenza di $f_n \to f$ è uniforme su un intervallo D se

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

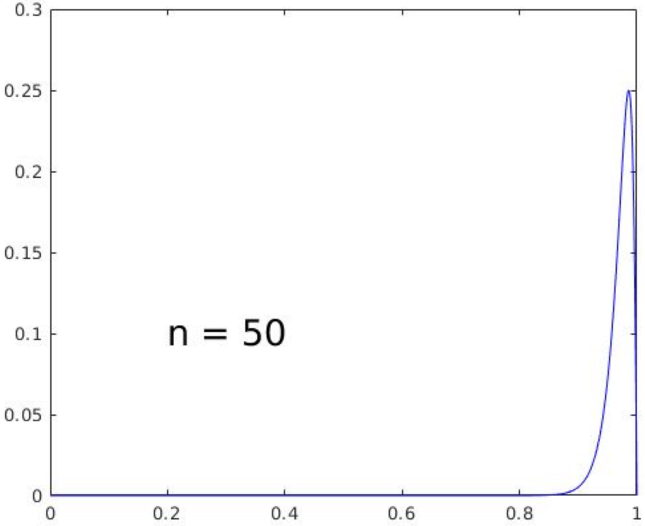
Nel nostro caso

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

Dallo studio di funzione di $f_n(x)$ si ha:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x^n) + x^n(-nx^{n-1}) = nx^{n-1}(1-2x^n)$$

- Il punto di massima si ha in $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$
- La funzione è crescente in $[0,\bar{x}]$ e decrescente in $(\bar{x},1]$
- $f_n(\bar{x}) = 1/4$



Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \neq 0 \quad \text{--> non si ha conv. uniforme su } I$$

Cosa succede se mi limito a un intervallo $[0,b]$ con $0<b<1$?

Fissiamo b.

Se prendiamo n sufficientemente grande, il punto di massimo cadrà fuori dall'intervallo $[0,b]$ e in tale intervallo la funzione sarà crescente, per cui:

$$\sup_{x\in[0,b]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(b)$$

Tuttavia $b \in I$, quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0$

Concludiamo che la convergenza è uniforme in $[0,b]$.

Successioni di funzioni

$(f_n) \longrightarrow f$ puntualmente in S

se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in S$

$(f_n) \longrightarrow f$ uniformemente in S

se $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| = 0$

conv. uniforme $\underset{\not\Leftarrow}{\rightarrow}$ conv. puntuale

tuttavia, c. puntuale è necessaria per c. uniforme

Serie di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

Allora conv. uniforme significa

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \left| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| = 0$$

Definiamo convergenza totale quando

$\exists\, M_k$ numerica non negativa convergente t.c. $\|f_k\|_S \le M_k$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx}$$ studiarne la convergenza su $S=(-\infty,+\infty)$

condizione <u>necessaria</u> per la convergenza puntuale: infinitesimalità del termine n-esimo della serie

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1} e^{nx} \overset{?}{=} 0$$ solo se $x<0$

riduco S a $S=(-\infty,0)$

provo a vedere se è verificata la conv. totale

$$\|f_n\|_S = \sup_{x<0} \left|(-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx}\right| = \frac{n^2}{n^2+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_S$ non converge (il termine n-esimo tende a 1!)

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ non converge totalmente su $(-\infty,0)$

studio allora insiemi $S=(-\infty,a)$ con $a<0$

$$\|f_n\|_S = \frac{n^2}{n^2+1} e^{na}$$ (la f. è monotona crescente in x)

$e^{na} = (e^a)^n = b^n$ con $0<b<1$ perchè $a<0$

$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge perchè serie geometrica.

(il valore assoluto di b è <1)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} b^n$ converge per il criterio del confronto $\left(\frac{n^2}{n^2+1}<1\right)$

quindi $M_n = \frac{n^2}{n^2+1} e^{na} = \|f_n\|_S$

è il termine n-esimo di una serie numerica convergente, non-negativa e tale che

$\|f_n\|_S \le M_n$

$\to$ ho conv. totale su tutti gli insiemi contenuti in $(-\infty,a]$ con $a<0$

$\to$ dunque uniforme sugli stessi insiemi

$\to$ conv. puntuale $\forall x<0$

Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 \cos(nx^2)}{n^3+1}$

a) convergenza puntuale in $\mathbb{R}$?

visto che la serie non è a termini positivi passiamo dalla conv. assoluta

$$\left| \frac{n x^2 \cos(nx^2)}{n^3+1} \right| \leq x^2 \frac{1}{n^2 + \frac{1}{n}} \leq \frac{x^2}{n^2}$$

ma $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

quindi la serie data conv. assolutamente puntualmente in $\mathbb{R}$

$\longrightarrow$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$

b) convergenza totale in $\mathbb{R}$?

f_n è il prodotto fra una funzione illimitata $\frac{n}{n^3+1} x^2$ e una funzione oscillante $\cos(nx^2)$

$\longrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \infty$

$\longrightarrow$ non posso trovare una successione numerica M_n che domini f_n

$\longrightarrow$ non ho convergenza totale in $\mathbb{R}$

Studiare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 \cos(nx^2)}{n^3+1}$

c) Studio la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

Si può dimostrare che la condizione di convergenza unif.

cioè $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$

implica $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x)| = 0.$

Visto che questo non è vero per la serie data in $\mathbb{R}$, non abbiamo conv. uniforme in tale insieme.

Dim: $\displaystyle |f_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|$

da cui $\displaystyle \underbrace{\sup_{x\in S} |f_n(x)|}_{1} \le \underbrace{\sup_{x\in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right|}_{2} + \underbrace{\sup_{x\in S} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|}_{3}$

3 tende a 0 per conv. uniforme

2 è asintoticamente equivalente a 3, quindi tende a 0

quindi 1 tende a zero

Studiare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^2 \cos(nx^2)}{n^3+1}$

Su intervalli contenuti in $\mathbb{R}$?

Provo la conv. totale su $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$, $c = \max(|x_1|, |x_2|)$

$$\left| \frac{n\,x^2 \cos(nx^2)}{n^3+1} \right| \leq \frac{n\,c^2}{n^3+1} < \frac{\cancel{n}\,c^2}{n^{\cancel{3}\,2}}$$

La serie numerica $c \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Quindi ho conv. totale, dunque uniforme, su ogni intervallo in $\mathbb{R}$.

Si studi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+3n^4}$

Proviamo a studiare la convergenza totale

Studiamo f_n:

$$f_n'(x) = \frac{x^2+3n^4-(x+n^2)(2x)}{(x^2+3n^4)^2} = \dots = \frac{-x^2-2xn^2+3n^4}{(x^2+3n^4)^2}$$

Risolviamo $f_n'(x)=0$:

$$-x^2-2xn^2+3n^4=0$$

$$x_{1/2} = \frac{n^2 \pm \sqrt{n^4+3n^4}}{-1} = \begin{cases} -3n^2 \\ n^2 \end{cases}$$

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \max\left\{ |f_n(-3n^2)|, |f_n(n^2)|, \left|\lim_{x\to-\infty} f_n(x)\right|, \left|\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right| \right\}$$

$$= \max\left\{ \frac{1}{3n^2}, \frac{1}{2n^2}, 0, 0 \right\} = \frac{1}{2n^2}$$

Essendo $\frac{1}{n^2}$ una serie numerica convergente,

abbiamo convergenza totale in $\mathbb{R}$ per la serie data.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n = x \underbrace{\sum_{n=1} n \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n}$$

$$|\sin t| < |t|,$$
$$\frac{|\sin t|}{|t|} < 1$$

Studio la conv. assoluta uniforme

$$|x| \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{\frac{|\sin \frac{x}{n}|^n}{\frac{|x|^n}{n^n}}}_{\leq 1} \cdot \frac{|x|^n}{n^n} \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |x|^n}{n^n}$$

$\downarrow$

è una serie di potenze nella variabile $y = |x|$ centrata in zero con $a_n = \frac{n}{n^n}$

calcolo il raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \to 0$$

infatti $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\downarrow$

raggio di convergenza infinita:

- conv. puntuale $|x| < \infty$
- conv. uniforme per ogni compatto in $(-\infty, \infty)$

tramite il criterio del confronto so che questi risultati valgono anche per $|x| \sum n \left|\sin \frac{x}{n}\right|^n$
e poichè la conv. assoluta implica quella normale
valgono anche per $x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n$

Analisi Matematica II

Esercitazione 5

Tutor: Simone Marullo

simone.marullo@student.unisi.it

Francesco Maratta

francesco.maratta@student.unisi.it