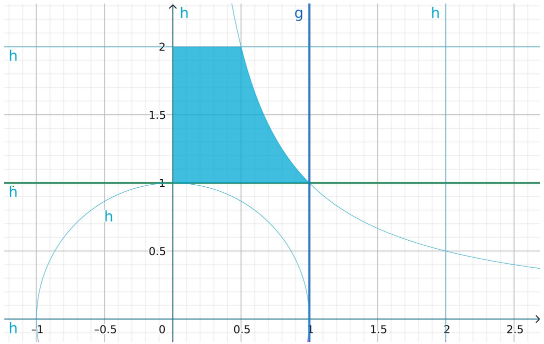
Analisi Matematica II

Esercitazione 6 - Integrali multipli

Tutor: Simone Marullo
simone.marullo@student.unisi.it
Francesco Maratta
francesco.maratta@student.unisi.it

Calcolare

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 1, \\ xy \leq 1, \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$$

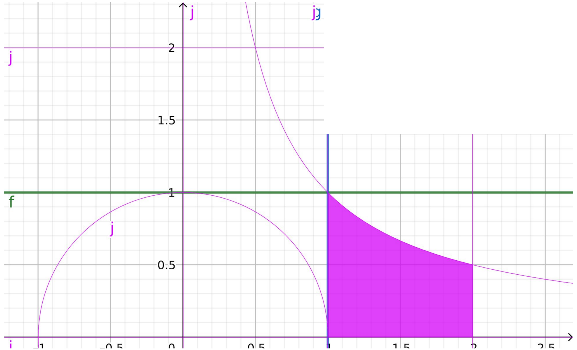


Parte 1 : $\begin{cases} 1 < y < 2 \\ 0 < x < \frac{1}{y} \end{cases}$ ····> è un dominio normale rispetto a y

$$I_1 = \iint_{1} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} x+y \,dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2y^2} + 1 \right) dy = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) + y \right]_1^2 = -\frac{1}{4} + 2 - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{4}$$

Calcolare

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \begin{array}{l} x^2+y^2\geq 1, \\ xy\leq 1, \\ 0\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq 2 \end{array}\right\}$$



Parte (2) : $\begin{cases} 1<x<2 \\ 0<y<\frac{1}{x} \end{cases}$

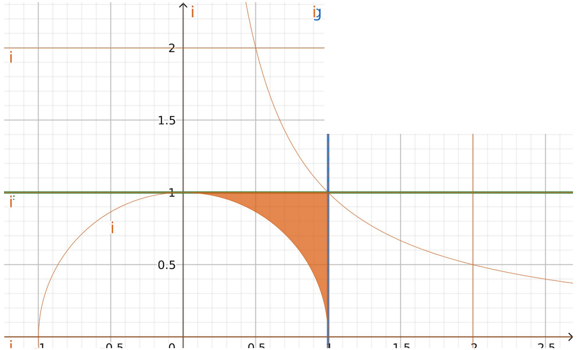
$$I_2 = \iint_{(2)} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} (x+y)\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{x}} = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \ldots = \frac{5}{4}$$

$I_1 = I_2$ ... ce lo aspettiamo!

Dominio e funzione sono simmetrici rispetto all'asse $y=x$

Calcolare

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \begin{array}{l} x^2+y^2\ge 1, \\ xy\le 1, \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{array}\right\}$$

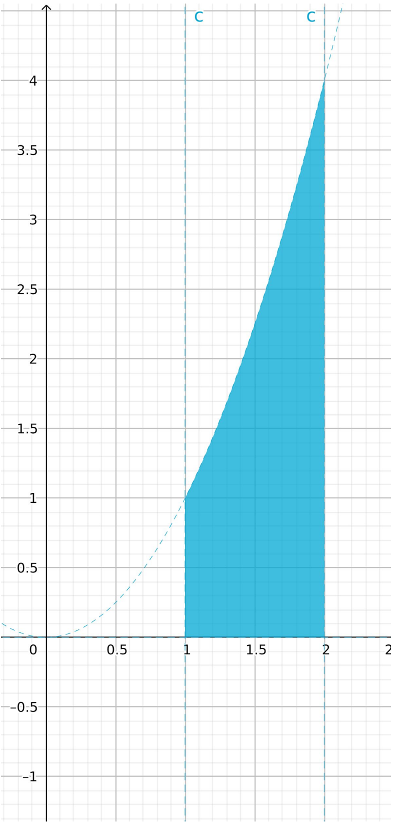


Parte (3). $\begin{cases} 0<x<1 \\ \sqrt{1-x^2}<y<1 \end{cases}$

$$I_3 = \iint_{(3)} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 x+y \; dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 x+\frac{1}{2}-\left(x\sqrt{1-x^2}+\frac{1-x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy = I_1+I_2+I_3 = \dots = \frac{17}{6}$$



Calcolare

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy \,, \qquad \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x^2, \ 1 \le x \le 2 \right\}$$

Il dominio è normale rispetto a entrambi gli assi, ma se lavoro rispetto a y devo scomporlo...

$$= \int_1^2 \left(\int_0^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^{x^2} \frac{x}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) x^2}\, dy \right) dx = \ := \int_1^2 \left(\int_0^{x^{\cancel{2}}} \frac{1}{1+t^2}\, dt \right) dx$$

<u>Sostituzione</u> : $t = \frac{y}{x}$

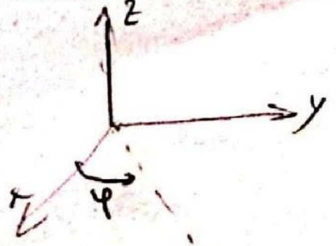
- $dt = \frac{1}{x}\, dy$
- estremi $y = 0 \to t = 0$, $y = x^2 \to t = x$

$$= \int_1^2 \left[\operatorname{arctg} t \right]_0^x dx = \int_1^2 \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\, dx = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_1^2 = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

Coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases}$$



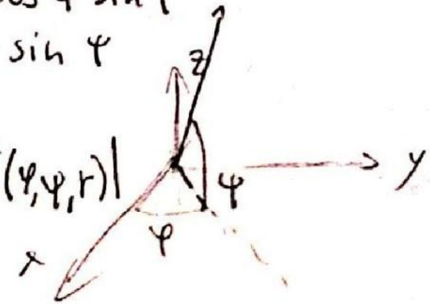
$$|\det J_C^{-1}(\varphi, \rho, z)| = \rho$$

Coord. steriche

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$\psi \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\varphi \to [0, 2\pi]$



$$|\det J_S^{-1}(\varphi,\psi,r)| = r^2\cos\psi$$

Calcolare

$$\int_0^h \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx\, dz$$

Il dominio di integrazione è un cilindroide

... uso le coordinate cilindriche

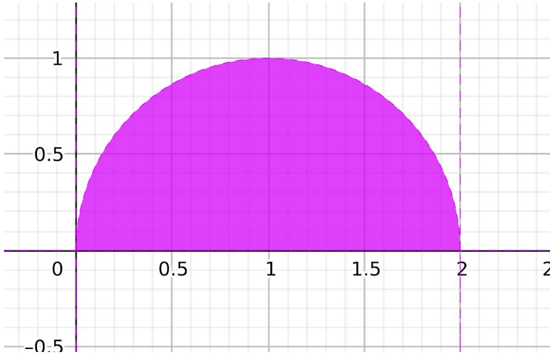
$$0<y<\sqrt{2x-x^2} \longrightarrow \quad y<\sqrt{2x-x^2}$$

$$\rho\sin\varphi<\sqrt{2\rho\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}$$

$$\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi<2\rho\cos\varphi$$

$$\rho^2<2\rho\cos\varphi$$

$$0<\rho<2\cos\varphi \quad \text{con} \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$



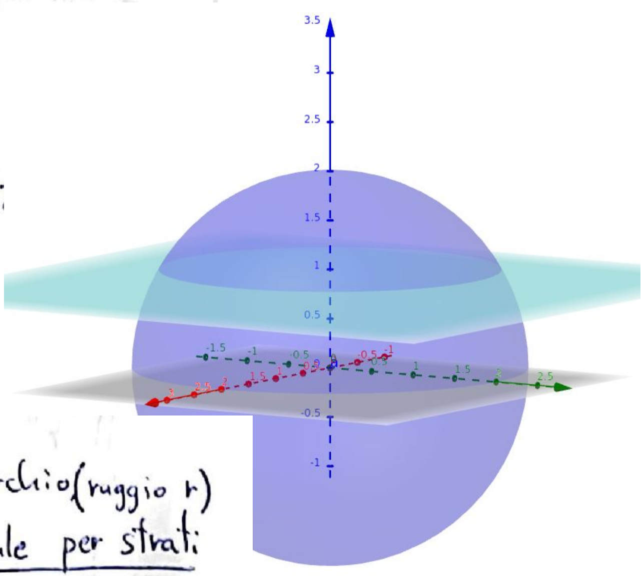
dominio XY

$$\int_0^h z \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^h z \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi\, dz = \int_0^h z \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^3\varphi\, d\varphi\, dz = \left(\int_0^h \frac{8}{3}z\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\cdot(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi\right)$$

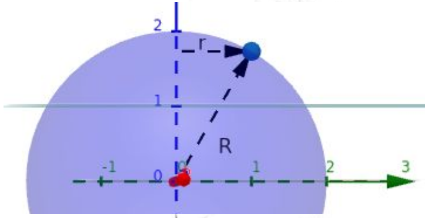
$$= \frac{4}{3}h^2\cdot\int_0^{\pi/2} \cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \quad = \frac{4}{3}h^2\cdot\left[\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} \quad = \frac{4}{3}h^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}h^2$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 1\}. \quad \text{Calcolare} \iiint_V x^2yz \, dx\,dy\,dz$$

Notiamo che il dominio di integrazione è una sfera di raggio di cui "prendo" solo la parte a quota maggiore di 1.



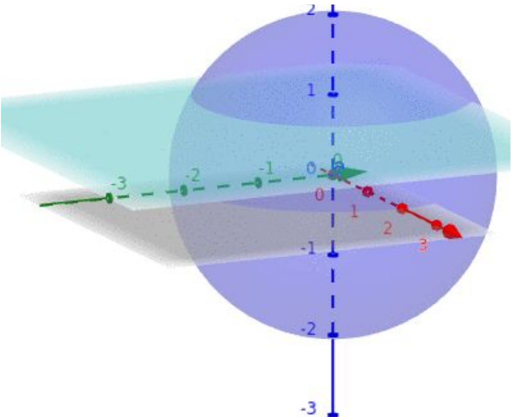
Chiamata B_z la sezione a quota z, che risulta essere un cerchio (raggio r) posso applicare il teorema di Fubini-Tonelli calcolando <u>l'integrale per strati</u>



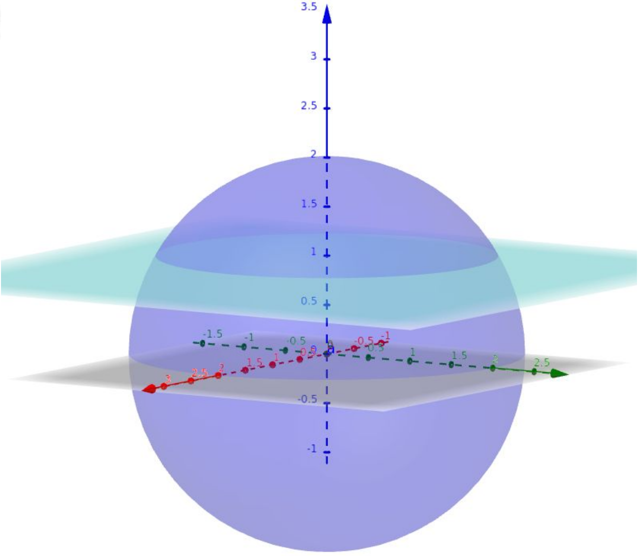
Teorema di Pitagora:
$r = \sqrt{2^2 - z^2}$

$$\int_1^2 \iint_{B_z} x^2yz \, dx\,dy \; dz$$

$$= \int_1^2 z \iint_{B((0,0,z),\sqrt{4-z^2})} x^2y \, dx\,dy \; dz$$



$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}$. Calcolare $\iiint_V x^2 y z \, dx\, dy\, dz$

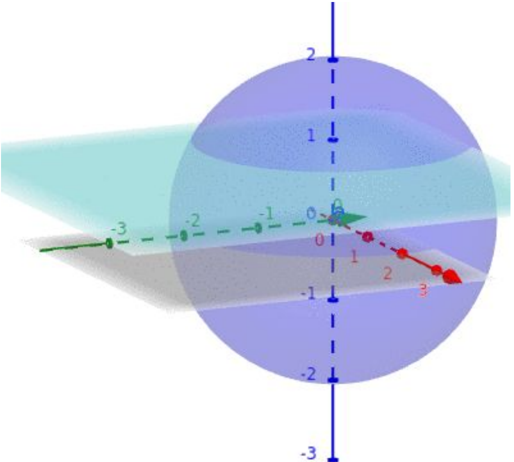


Calcolo l'integrale su B_z utilizzando le coordinate polari

$$\iint_{B_z} \rho^2 \cos^2\theta \, \rho \sin\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4 \, d\rho \right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta - \sin^3\theta \, d\theta = 0$$

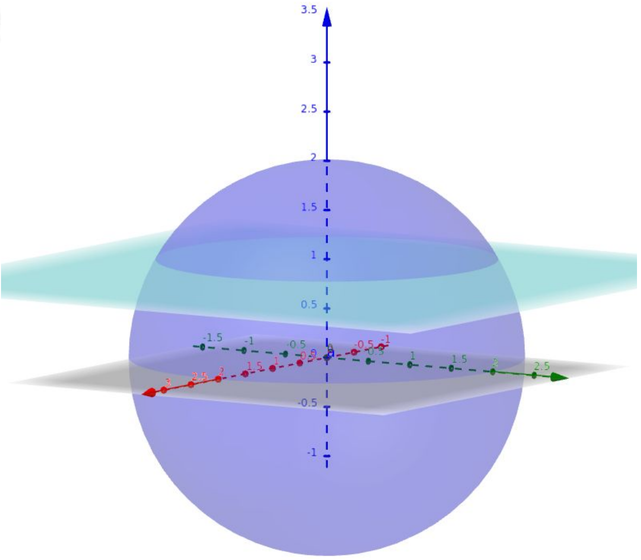


Non è necessario procedere visto che l'integrale vale zero.

È possibile svolgere l'integrale su B_z anche restando in coord. cartesiane:

$$\iint_{B_z} y x^2 \, dx\, dy = \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} x^2 \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} y \, dy \, dx = \dots = 0$$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}$. Calcolare $\iiint_V x^2yz\,dx\,dy\,dz$



Il teorema di Fubini-Tonelli può essere anche applicato <u>per fili</u>:

$$\iint_{B_1} x^2y \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy = \dots$$

dove B_1 è la sezione che si ottiene a quota $z=1$

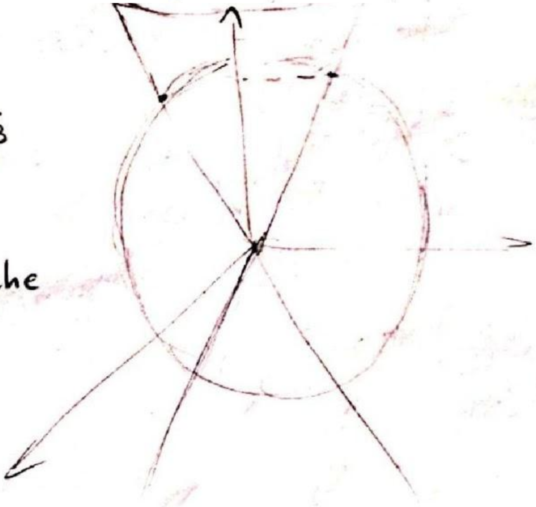
Ad ogni modo è possibile intuire che l'integrale sia nullo prima di calcolarlo: considerata la sezione a quota z, è possibile vedere che per ogni rettangolino infinitesimo ce n'è un altro (simmetrico rispetto all'asse y) che dà identico contributo ma ce ne sono pure altri due (simmetrici rispetto all'asse x) che danno contributo opposto (considerare la simmetria dell'integranda e del dominio).

eq. cono:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

$\boxed{C}$ $\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le \frac{z^2}{3},\ z \ge 0 \right\}$

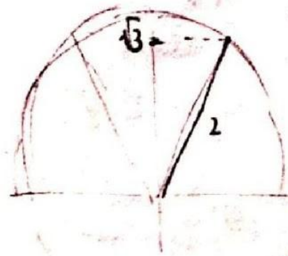
Calcolare

$\iiint_\Omega dxdydz$ con coord. sferiche



studio l'intersezione tra i due solidi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=\frac{z^2}{3} \end{array}\right| \rightarrow \frac{z^2}{3}+z^2=4,\ \frac{4}{3}z^2=4,\ z^2=3,\ z=\pm\sqrt{3}$$



esprimo il vincolo in coord. sferiche

$z = r\sin\varphi$

$\hookrightarrow \sin\varphi_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \varphi_{min} = \frac{\pi}{3},\ \varphi_{max} = \frac{\pi}{2}$

in coord. sferiche il dominio risulta "rettangolare" (facilmente integrabile)

$$\iiint_V 1\, dxdydz = \iiint r^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\pi$$

Analisi Matematica II

Esercitazione 6

Tutor: Simone Marullo

simone.marullo@student.unisi.it

Francesco Maratta

francesco.maratta@student.unisi.it