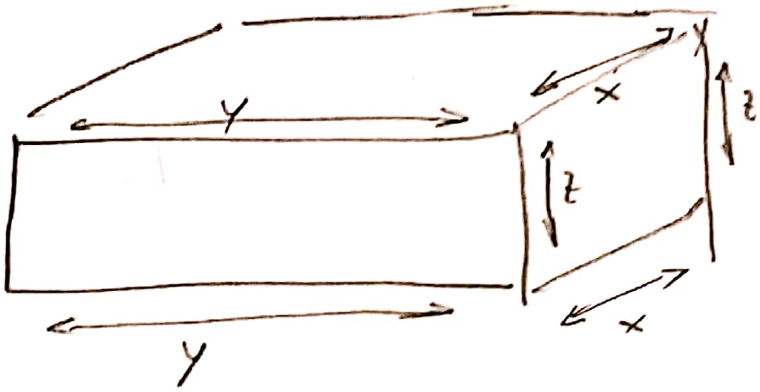
max e min di funzioni di più variabili

- liberi
  - test Hessiana
- vincolati
  - metodo parametrico
  - moltiplicatori di Lagrange

1) Decidi di costruire una scatola a forma di parallelepipedo di volume $V_0 = 1000 \text{ cm}^3$.
Trova le dimensioni x, y, z tali da minimizzare la superficie totale.



$A = 2xz + 2xy + 2yz$, $\qquad V_0 = xyz$, $\quad z = \dfrac{V_0}{xy}$ $\qquad x \neq 0$, $y \neq 0$

$$f(x,y) = 2xy + 2\cancel{y}\cdot\frac{V_0}{x\cancel{y}} + 2\frac{V_0}{\cancel{x}y}\cancel{x} = 2xy + \frac{2V_0}{x} + \frac{2V_0}{y}$$

<u>Strategia</u>: 1) trovo p.ti stazionari
2) studio l'Hessiana per capirne la natura

$$f_x = 2y - \frac{2V_0}{x^2} \qquad f_y = 2x - \frac{2V_0}{y^2}$$

1) $\nabla f = 0 \rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2y - \dfrac{2V_0}{x^2} = 0 \longrightarrow y = \dfrac{V_0}{x^2} \\ 2x - \dfrac{2V_0}{y^2} = 0 \end{cases}$; $\quad 2x - \dfrac{2V_0}{\left(\frac{V_0}{x^2}\right)^2} = 0$, $\quad x - \cancel{V_0}\dfrac{x^4}{V_0^{\cancel{2}}} = 0$

$1 - \frac{x^3}{V_0} = 0 \rightarrow x^3 = V_0, \quad x = \sqrt[3]{V_0}$

$y = \frac{V_0}{V_0^{2/3}} = \sqrt[3]{V_0}$

$P_1 = (\sqrt[3]{V_0} ; \sqrt[3]{V_0})$

$f_{xx} = -2V_0(-2x^{-3}) = \frac{4V_0}{x^3}$ $\qquad f_{yy} = -2V_0(-2y^{-3}) = \frac{4V_0}{y^3}$

$f_{xy} = 2 = f_{yx}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V_0}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4V_0}{y^3} \end{pmatrix}$$

$Tr\ H_f = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad Det\ H_f = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

se $Det\ H_f > 0$: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ concordi

se $Tr\ H_f > 0$: $\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ positivi

---

$\det H_f(P_1) = \left[\frac{4V_0}{x^3} \cdot \frac{4V_0}{y^3} - 2 \cdot 2\right]_{P_2} = \frac{16\cancel{V_0^2}}{\cancel{V_0} \cdot \cancel{V_0}} - 4 = 12 \qquad > 0$

$Tr\ H_f(P_1) = 4V_0\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right)_{P_2} = 4V_0\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_0}\right) = 8 \qquad > 0$

$\hookrightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \rightarrow H_f$ definita positiva in P_2

$\rightarrow P_2$ p.to di minimo per f

$x = 10$ cm

$y = 10$ cm

$z = \frac{1000}{10 \cdot 10} = 10$ cm

simonemarullo.github.io

2) La produzione di una fabbrica è modellata dalla funzione

$$f(x,y) = 100\,x^{3/4}\,y^{1/4}.$$

x: unità di lavoro impiegate (a 150 € l'una)

y: capitale impiegato (a 250 € l'una)

costo della produzione: 50'000 €

può la produzione eccedere 16'000 unità?

$g_1(x,y) = 150x + 250y - 50000$ $\qquad g_1(x,y) = 0$

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g_1 \end{cases} \qquad \nabla f(x,y) = \left(100 \cdot \frac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4},\ 100 \cdot \frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4}\right)$$

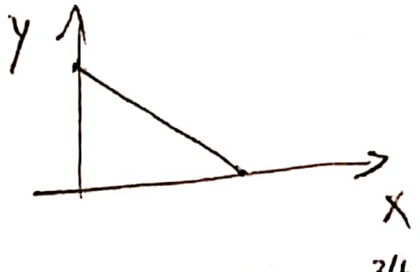
$$\nabla g_1(x,y) = (150, 250)$$

$$\begin{cases} 1)\ 150x + 250y - 50'000 = 0 \\ 2)\ 75x^{-1/4}y^{1/4} = \lambda \cdot 150 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2} x^{-1/4} y^{1/4} \\ 3)\ 25x^{3/4}y^{-3/4} = \lambda \cdot 250 \longrightarrow x^{3/4}y^{-3/4} = 10 \cdot \lambda;\ x^{3/4}y^{-3/4} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/4} y^{1/4} \end{cases}$$

moltiplico per $x^{1/4}$ $\longrightarrow$ $x\,y^{-3/4} = 5\,y^{1/4}$

$$x = 5y, \quad y = \frac{x}{5}$$

1) $150x + 50x = 50'000$, $x = \frac{50'000}{200} = 250 \longrightarrow y = 50$ $\qquad P(250, 50)$



insieme chiuso e limitato → compatto

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ ammette max e min

$$f(250,50) = 100 \cdot 250^{3/4} \cdot 50^{1/4} \simeq 16719$$

3) $f(x,y) = xy$

?: max e min assoluti di f ristretta alla circonferenza unitaria centrata nell'origine

---

① $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2-1}_{g_1} = 0 \}$

$\nabla g = (2x, 2y) \qquad \nabla f = (y, x)$

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases} \rightarrow \quad x = 4\lambda^2 x, \quad x(1-4\lambda^2) = 0$$

$x = 0$ non soddisfa 1

$1-4\lambda^2 = 0, \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_{1/2} =$

$\frac{1}{2} \xrightarrow{2)} y = x \xrightarrow{1)} x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{1}{2} \xrightarrow{2)} y = -x \xrightarrow[1)]{} x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

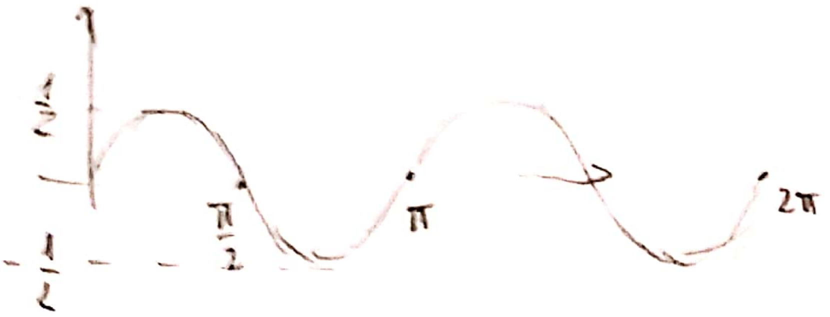
$f(P_1) = \frac{1}{2} \qquad f(P_2) = \frac{1}{2} \qquad f(P_3) = -\frac{1}{2} \qquad f(P_4) = -\frac{1}{2}$

$\min f|_M = -\frac{1}{2}, \qquad \max f|_M = \frac{1}{2}$

② Parametrico

parametrizz. del vincolo $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$

$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$



---

4) **Homework**: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Soggetta ai vincoli $x+y-z=1$, $x+y+z=0$

Trovare p.ti di minimo e massimo assoluti

---

5) Trovare i punti a minima e massima distanza rispetto all'origine che appartengo all'insieme

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2 , \ x-2z=3 \}$$

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$b^2 - 4ac < 0$: ellisse

- funzione continua
- insieme M è compatto

$\Big] \to$ Weierstrass: ammette min/max assoluti

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \nabla f_1 = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \end{cases}$$

$\nabla f_1 = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g_1 = (2x, 2y, -2z)$

$\nabla g_2 = (1, 0, -2)$

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x-2z-3=0 \\ 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y \\ 2z = -2\lambda z - 2\mu \end{cases}$$

$2y = 2\lambda y \longrightarrow$ (a) $y=0$, $\vee$ (b) $\lambda = 1$

Scanned by CamScanner

(a) $\begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \\ 2x = 2\lambda x + \mu \\ y = 0 \\ 2z = -2\lambda z - 2\mu \end{cases}$ (a1) $x = z$ (a2) $x = -z$

(a1) $\begin{cases} x = z \\ -z - 3 = 0 \longrightarrow z = -3 \\ 2z = 2\lambda z + \mu \\ 2z = -2\lambda z - 2\mu \\ y = 0 \end{cases}$

$P_1 = (-3, 0, -3)$

(a2) $\begin{cases} x = -z \\ -3z - 3 = 0 \longrightarrow z = 1 \\ -2z = 2\lambda z + \mu \\ 2z = -2\lambda z - 2\mu \\ y = 0 \end{cases}$

$P_2 = (1, 0, -1)$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \longrightarrow 9 + y^2 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \longrightarrow x = 3 \\ \cancel{2x} = \cancel{2x} + \mu \longrightarrow \mu = 0 \\ 2z = -2z - \mu \longrightarrow 2z = -2z, \ z = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

impossibile

$f(P_1) = \sqrt{3^2 + 0 + 3^2} = 3\sqrt{2} \longrightarrow$ massimo assoluto

$f(P_2) = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2} \longrightarrow$ minimo assoluto

6) Trova le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo con il maggior volume possibile, tenendo conto che vuoi utilizzare esattamente $A_0 = 12 m^2$ di cartone.

$A_0 = 2xy + 2yz + 2zx$, $V = xyz$

$z(2y+2x) = A_0 - 2xy$

$z = \frac{A_0 - 2xy}{2(x+y)}$ $\qquad V = xy \frac{A_0 - 2xy}{2(x+y)}$

Analisi II

$f(x,y) = xy \frac{A_0 - 2xy}{2(x+y)}$

problema di ottimizzazione non vincolato in $\mathbb{R}^2$ con parametro $A_0 > 0$

$$f_x = \frac{\frac{d[xy(A_0-2xy)]}{dx} \cdot 2(x+y) - xy(A_0-2xy)\frac{d(2(x+y))}{dx}}{4(x+y)^2}$$

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$= \frac{\frac{d(xyA_0 - 2x^2y^2)}{dx} \cdot 2(x+y) - xy(A_0-2xy) \cdot 2}{4(x+y)^2}$$

$$= \frac{(yA_0 - 4y^2x) \cdot \cancel{2}(x+y) - \cancel{2}xy(A_0-2xy)}{2\cancel{4}(x+y)^2}$$

$$= \frac{\cancel{xyA_0} + y^2A_0 - 4x^2y^2 - 4y^3x - \cancel{xyA_0} + 2x^2y^2}{2(x+y^2)} = \frac{y^2(A_0 - 2x^2 - 4xy)}{2(x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{x^2(A_0 - 2y^2 - 4xy)}{2(x+y)^2}$$

l'ho ottenuta scrivendo x al posto di y e viceversa per simmetria: se scambio x e y nella f. data ottengo la stessa funzione come prima

strategia: trovare punti stazionari → risolvere $\nabla f = 0$, $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$
valutare la natura

Soluzione banale del sistema $x=0, y=0$ ma non è accettabile (altrimenti t non è ben definito)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2(A_0-2x^2-4xy)}{2(x+y)^2}=0 \\ \dfrac{x^2(A_0-2y^2-4xy)}{2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

d'ora in poi $x\neq0, y\neq0$

$$\begin{cases} A_0-2x^2-4xy=0 \\ A_0-2y^2-4xy=0 \end{cases}$$

$$//\ -2x^2+2y^2\ //=0; \quad x^2=y^2 \to x=y \ \text{(a)} \ \vee \ x=-y \ \text{(b)}$$

(b) non accettabile rispetto al significato del problema $(x>0, y>0)$ (cmq non trovo p.ti stazionari) $A_0=-2x^2$ se $x=-y$, $x^2=-\frac{A_0}{2}$ impossibile

(a) se $x=y$, $A_0-2x^2-4x^2=0$, $6x^2=A_0$, $x=\pm\sqrt{\frac{A_0}{6}}$

p.ti stazionari trovati:

$$P_2=\left(\sqrt{\frac{A_0}{6}}; \sqrt{\frac{A_0}{6}}\right)$$

$$P_3=\left(-\sqrt{\frac{A_0}{6}}; -\sqrt{\frac{A_0}{6}}\right)$$ (non accettabile rispetto al significato del problema)

$$f_{xx}=\frac{y^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{(A_0-2x^2-4xy)}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{2}\frac{(-4x-4y)(x+y)^{\cancel{2}}-(A_0-2x^2-4xy)2\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{y^2}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{4}^{\,2}(x+y)^2-\cancel{2}^{\,1}(A_0-2x^2-4xy)}{(x+y)^3}$$

$$=-y^2\frac{2(\cancel{x^2}+y^2+\cancel{2xy})+(A_0-\cancel{2x^2}-\cancel{4xy})}{(x+y)^3}$$

$$=-y^2\frac{2y^2+A_0}{(x+y)^3}$$

$$f_{yy}=\dots=-x^2\frac{2x^2+A_0}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\left(y^2(A_0-2x^2-4xy)\right)}{dy}\cdot(x+y)^2 - y^2(A_0-2x^2-4xy)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2yA_0-4yx^2-12y^2x)\,(x+y)^{\cancel{2}} - y^2(A_0-2x^2-4xy)\cdot 2\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2xyA_0-4yx^3-12y^2x^2+\cancel{2y^2A_0}-\cancel{4y^2x^2}-12y^3x-\cancel{2y^2A_0}+\cancel{4x^2y^2}+8xy^3}{(x+y)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{xy(2A_0-4x^2-12xy-12y^2+8y^2)}{(x+y)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{xy(2A_0-4x^2-12xy-4y^2)}{(x+y)^3}$$

$$= \frac{xy(A_0-2x^2-6xy-2y^2)}{(x+y)^3}$$

$$f_{xx}(P_2) = -\frac{A_0}{6}\,\frac{2\frac{A_0}{6}+A_0}{\left(\sqrt{\frac{A_0}{6}}+\sqrt{\frac{A_0}{6}}\right)^3} = -\frac{A_0}{6}\,\frac{\frac{4}{3}A_0}{8\left(\frac{A_0}{6}\right)^{\frac{3}{2}}} = -A_0^2\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{6\cdot\cancel{8}_2}\cdot\frac{6^{\frac{3}{2}}}{A_0^{\frac{3}{2}}} = -\frac{A_0^{\frac{1}{2}}}{36}\cdot\sqrt{6^3}$$

$$= -\frac{\sqrt{A_0}}{\cancel{36}_6}\cdot\cancel{6}\sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6A_0}}{6}$$

$$f_{yy}(P_2) = \dots = -\frac{\sqrt{6A_0}}{6}$$

$$f_{xy}(P_2) = \frac{\sqrt{\frac{A_0}{6}}\sqrt{\frac{A_0}{6}}\left(A_0-2\frac{A_0}{6}-6\frac{A_0}{6}-2\frac{A_0}{6}\right)}{\left(\sqrt{\frac{A_0}{6}}+\sqrt{\frac{A_0}{6}}\right)^3} = \frac{A_0}{\cancel{6}}\cdot\frac{A_0\left(\cancel{1}-\frac{1}{3}-\cancel{1}-\frac{1}{3}\right)}{8A_0^{\frac{3}{2}}}\cdot\cancel{6}\sqrt{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{6A_0}}{12}$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6A_0}}{6} & -\frac{\sqrt{6A_0}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6A_0}}{12} & -\frac{\sqrt{6A_0}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(P_2) = \frac{\cancel{6}A_0}{\cancel{36}_6} - \frac{\cancel{6}A_0}{\cancel{144}_{24}} = \frac{1}{8}A_0$$

$$\mathrm{Tr}\, H_f(P_2) = -\frac{\sqrt{6}A_0}{3} < 0$$

quindi entrambi gli autovalori hanno segno strettamente negativo, si tratta di un massimo locale

Se studiamo P_3:

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6A_0}}{6} & \frac{\sqrt{6A_0}}{12} \\ \frac{\sqrt{6A_0}}{12} & \frac{\sqrt{6A_0}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(P_3) = \frac{6A_0}{36} - \frac{6A_0}{144} = \frac{1}{8}A_0$$

$$Tr\, H_f(P_3) = \frac{\sqrt{6A_0}}{3} > 0$$

entrambi gli autovalori hanno segno strettamente positivo, si tratta di minimo locale

Nota: questa è la risposta completa dal punto di vista di Analisi II.
Dal punto di vista della formulazione originaria P_3 non è accettabile perchè x, y, z sono dimensioni fisiche quindi non possono essere negative

Aprile 2016

Individuare punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

soggetta ai vincoli $x+y-z=1$, $x+y+z=0$

① METODO PARAMETRICO

Studio l'intersezione tra i vincoli: vedo subito che si tratta di due piani non paralleli.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad x = z-y+1 \to \quad y = z-x+1 = \frac{1}{2}-x$$

$-2z = 1, \quad z = -\frac{1}{2}$

Mi accorgo che l'insieme ammissibile può essere facilmente espresso come:

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^T = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}-x \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \left(t, \frac{1}{2}-t, -\frac{1}{2}\right)^T$ è una rappresentazione parametrica del vincolo.

$t \in (-\infty, \infty)$

Lo studio di f ristretta a G è allora equivalente allo studio di $f \circ \varphi$.

$f \circ \varphi = x^2 + \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \frac{1}{4} = 2x^2 - x + \frac{1}{4}$, una parabola rivolta verso l'alto (ammette sicuramente minimo).

Derivando: $4x - 1 = 0 \to \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$ è p.to di minimo assoluto

2) METODO DEI MOLTIPLICATORI

Abbiamo dimostrato che se x_0 è p.to di min/max rel. per $f_{|G}$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. Cioè: p.ti di min e max vanno cercati tra i p.ti stazionari della lagrangiana.

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y - z - 1) - \mu(x + y + z)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}: & 2x - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}: & 2y - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}: & 2z + \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}: & x + y - z = 1 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}: & x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ 2x - \lambda - \mu = 0 \\ 2y - \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 1 \; ; \; \lambda = 1 + \mu \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1) & z = -\frac{1}{2} \\ (2) & 2x - 1 - \mu - \mu = 0 \\ (3) & 2y - 1 - \mu - \mu = 0 \\ & \lambda = 1 + \mu \\ & x + y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & — \\ (2) & \cancel{1} - 2y - \cancel{1} - 2\mu = 0, \quad 2y = -2\mu, \quad y = -\mu \\ (3) & 2y - 1 - 2\mu = 0, \quad 2y = 1 + 2\mu \longrightarrow -2\mu - 2\mu = 1 \; ; \; \mu = -\frac{1}{4} \\ & — \\ & — \end{cases}$$

$$\lambda = 1 + \mu = \frac{3}{4}$$

ma $2x = \lambda + \mu$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

/!\ Chi mi garantisce che il minimo ci sia veramente?

<u>intuitivamente:</u>
La funzione è una distanza nello spazio
il vincolo è una retta
il minimo ci deve essere

<u>formalmente:</u> la funzione è continua, è limitata inferiormente (≥ 0)
allontanandosi dall'origine va a $+\infty$
è soddisfatta la condiz. di coercività