① SIA $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-x-y^2 \\ y(2x-1) \end{pmatrix}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

TROVARE I PUNTI IN CUI f È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE USANDO IL TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE E DIRE SE f È UN DIFFEOMORFISMO GLOBALE.

f È DI CLASSE C^1 (COMPOSIZIONE DI FUNZIONI REGOLARI)

CALCOLO LA MATRICE JACOBIANA

$$J_f(v) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(v) \\ \nabla f_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -2y \\ 2y & 2x-1 \end{pmatrix}$$

E IL SUO DETERMINANTE

$$\det J_f(v) = (2x-1)^2 + 4y^2$$

SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE $\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{2};0)\} = \Omega$
QUINDI IN OGNI PUNTO v, f È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE, CIOÈ f RISTRETTA AD UN INTORNO ARBITRARIAMENTE PICCOLO SODDISFA LA DEFINIZIONE DI DIFFEOMORFISMO.

f È UN DIFFEOMORFISMO GLOBALE?
OSSIA: f SODDISFA LA DEFINIZIONE DI DIFFEOMORFISMO SENZA APPLICARE ALCUNA RESTRIZIONE AD INTORNI?
NO, PERCHÈ $f_{|\Omega}$ NON È NEMMENO INIETTIVA!

INFATTI, PROVIAMO A GUARDARE DOVE $f = \underline{0}$:

$$\begin{cases} x^2-x-y^2=0 & \to \text{se } y=0, \text{ deve essere } x(x-1)=0, \text{ cioè } x=0 \vee x=1 \\ y(2x-1)=0 & \to y=0 \vee x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

QUINDI $f(0,0) = f(1,0) = 0$ ... NON È INIETTIVA
$\to$ NON È UN DIFFEOMORFISMO

② DATA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CON $f(x,y) = \begin{pmatrix} 13 \sin x + 2 \sin y \\ 2 \cos x + \sin y \end{pmatrix}$

DIRE SE

- È LOCALMENTE INVERTIBILE IN UN INTORNO DI $(0,0)$
- È GLOBALMENTE INVERTIBILE

CALCOLO LA MATRICE JACOBIANA:

$$J_f(v) = \begin{pmatrix} 13 \cos x & 2 \cos y \\ -2 \sin x & \cos y \end{pmatrix}$$

CALCOLO IL SUO DETERMINANTE

$$\det J_f(v) = 13 \cos x \cos y + 4 \sin x \cos y = \cos y \, (13 \cos x + 4 \sin x)$$

QUINDI f È LOCALMENTE INVERTIBILE IN UN INTORNO DI $(0,0)$ PERCHÈ $J_f(0,0) \neq 0$

LA FUNZIONE NON È GLOBALMENTE INVERTIBILE

INFATTI È PERIODICA (TANTO RISPETTO AD x QUANTO RISPETTO AD y)

(3) DATA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CON $f(x,y) = y^3 + 2x^3 + xy - 4x^2 + 2x$

a) VERIFICARE CHE IN UN INTORNO DI $P = (1,0)$ L'EQUAZIONE $f(x,y) = 0$ DEFINISCE IMPLICITAMENTE UNA FUNZIONE $y = \phi(x)$

PER PRIMA COSA, VERIFICHIAMO CHE $f(P) = 0$:

$f(1,0) = 0 + 2 + 0 - 4 + 2 = 0$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI DI f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y - 8x + 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$$

f È UNA FUNZIONE DI CLASSE C^1.

~~VERIFICHIAMO LE IPOTESI DI APPLICAB~~

IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE È APPLICABILE?

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 1 \neq 0 \qquad \checkmark$$

$\rightarrow$ ESISTE UN INTORNO DI P IN CUI È POSSIBILE ESPLICITARE f RISPETTO ALLA VARIABILE y RICAVANDO $y = \phi(x)$

b) CALCOLARE $\phi'(1)$

UTILIZZO LA FORMULA DEL TEOREMA DEL DINI:

$$\phi'(1) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1,0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

④ DATA $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ CON $f(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$

a) VERIFICARE CHE IN UN INTORNO DI $P = (0, e, 2)$ L'EQUAZIONE $f(x,y,z) = 0$ DEFINISCE IMPLICITAMENTE UNA FUNZIONE $z = h(x,y)$.

COMINCIAMO COL VERIFICARE CHE $f(P) = 0$:

$$f(0, e, 2) = e^2 + 0 + 4 - e^2 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + 2z - e^z$$

f È DI CLASSE C^1, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = 4 - e^2 \neq 0$

QUINDI POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA! $\checkmark$

b) CALCOLARE $\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(0,e)}$

RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE IN UN INTORNO DI $(0,e)$:

$$y^2 + x \cdot h(x,y) + h^2(x,y) - e^{h(x,y)} - 4 = 0$$

DERIVIAMO RISPETTO AD x L'IDENTITÀ:

$$h(x,y) + x \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + 2h(x,y) \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - e^{h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$$

PONENDO $(x,y) = (0,e)$:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(0,e)} \left[x + 2h - e^h\right]_{(0,e)} = -h(0,e)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(0,e)} = -\frac{2}{0 + 4 - e^2}$$

sappiamo che $h(0,e) = 2$ perchè stiamo esplicitando in un intorno di P

5 DATA L'EQUAZIONE

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + e^{x+y} + y^3 - e^y + ye^x - y = 0$$

TROVARE TUTTI I VALORI $y_0 \in \mathbb{R}$ TALI CHE SIA APPLICABILE IL TEOREMA DEL DINI PER L'ESISTENZA DI UNA ~~ESEMPIO~~ ~~FUNZIONE DEFINITA~~ FUNZIONE $y = \phi(x)$ DEFINITA IMPLICITAMENTE IN UN INTORNO DI $(0, y_0)$ DALL'EQUAZIONE DATA.

~~PER ESPLICITARE y, DEVE ESSERE~~

PER ESPLICITARE y, IL TEOREMA CI DICE DI VERIFICARE $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,y_0)} \neq 0$

CALCOLO $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + e^{x+y} + 3y^2 - e^y + e^x - 1$

IN PARTICOLARE,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,y_0)} \neq 0$$

$$\rightarrow -2y_0 + \cancel{e^{y_0}} + 3y_0^2 - \cancel{e^{y_0}} + \cancel{1} - \cancel{1} \neq 0$$

$$\rightarrow y_0(3y_0 - 2) \neq 0 \longrightarrow y_0 \notin \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$$

PERCHÈ SIA APPLICABILE IL TEOREMA NATURALMENTE $(0, y_0) \in M$, DOVE $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

$$0 - y_0^2 + \cancel{e^{y_0}} + y_0^3 - \cancel{e^{y_0}} + \cancel{y_0 e^0} - \cancel{y_0} = 0$$

$$y_0^2(y_0 - 1) = 0 \rightarrow y_0 \in \{0, 1\}$$

QUINDI, RIASSUMENDO, $y_0 = 1$

LA FUNZIONE $y = \phi(x)$ ESISTE IN UN INTORNO DI $(0, 1)$

⑥ DATO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + z^3 + 1 = 0 \\ x - 2y^2 - 3z^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

a) PROVARE CHE IN UN INTORNO DI $P = (1, 1, 1)$

- y SI PUÒ ESPLICITARE RISPETTO A x: $y = \phi_1(x)$
- z SI PUÒ ESPLICITARE RISPETTO A x: $z = \phi_2(x)$

b) CALCOLARE $\phi_1'(1)$ e $\phi_2'(1)$

a) BISOGNA USARE IL TEOREMA DELLE F. IMPLICITE, CON

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 + z^3 + 1 \\ x - 2y^2 - 3z^2 + 4 \end{pmatrix}$$

IN PARTICOLARE, CONSIDERIAMO L'OPPORTUNO MINORE DEL JACOBIANO:

$$\frac{\partial f}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6xy & 3z^2 \\ -4y & -6z \end{pmatrix}$$

1) P È SOLUZIONE DEL SISTEMA $(f(P) = 0)$

2) $\det \left. \frac{\partial f}{\partial(y,z)} \right|_{(1,1,1)} = 36 + 12 \neq 0$

$\rightarrow$ DAL TEOREMA SEGUE LA LOCALE ESPLICITABILITÀ

b) RISCRIVIAMO IL SISTEMA COME $f(x, \phi_1(x), \phi_2(x))$ IN UN INTORNO DI P:

$$\begin{cases} x^3 - 3x\,\phi_1^2(x) + \phi_2^3(x) + 1 = 0 \\ x - 2\phi_1^2(x) - 3\phi_2^2(x) + 4 = 0 \end{cases}$$

DERIVIAMO RISPETTO AD x:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3\phi_1^2(x) - 3x \cdot 2\phi_1(x)\,\phi_1'(x) + 3\phi_2(x)\,\phi_2'(x) = 0 \\ 1 - 4\phi_1(x)\,\phi_1'(x) - 6\phi_2(x)\,\phi_2'(x) = 0 \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE $x = 1$, $\phi_1(1) = 1$, $\phi_2(1) = 1$:

$$\begin{cases} \cancel{3} - \cancel{3} - 6\phi_1'(1) + 3\phi_2'(1) = 0 \\ 1 - 4\phi_1'(1) - 6\phi_2'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_2'(1) = 2\phi_1'(1) \\ 1 - 4\phi_1'(1) - 12\phi_1'(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \phi_1'(1) = \frac{1}{16}, \quad \phi_2'(1) = \frac{1}{8}$$